

MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA

istiyanto.com

Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain

Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?

Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.

Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:

sebelasseptember@yahoo.com

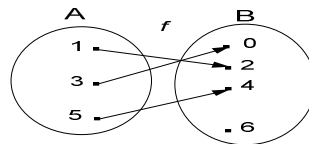
Materi: Fungsi Kuadrat

- Kajian ulang tentang fungsi
- Fungsi kuadrat dan grafiknya
- Menentukan fungsi kuadrat
- Menentukan sumbu simetri, titik puncak, sifat definit positif atau negatif fungsi kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna
- Menentukan fungsi kuadrat yang melalui tiga titik yang tidak segaris
- Model matematika yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat

A. Kajian ulang tentang fungsi

Pada gambar di bawah ini diberikan diagram panah suatu relasi dari himpunan

$A = \{1,3,5\}$ ke himpunan $B = \{0,2,4,6\}$.



Tampak bahwa setiap anggota A dikawankan dengan tepat satu anggota B . Relasi yang demikian disebut sebagai **fungsi** atau **pemetaan**.

Definisi:

Fungsi atau **pemetaan** f dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang mengawankan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B .

Fungsi f tersebut dituliskan dengan $f: A \rightarrow B$ yang dibaca: *fungsi f memetakan dari A ke B*. Jika $x \in A$ dan dipasangkan dengan $y \in B$, maka y disebut **peta** dari x dan ditulis $y = f(x)$. Selanjutnya himpunan A disebut **daerah asal (domain)**, himpunan B disebut **daerah kawan (kodomain)** dan semua anggota B yang merupakan peta dari anggota A disebut **daerah hasil** atau **range fungsi**.

Pada fungsi yang disajikan pada diagram panah di atas terlihat bahwa daerah asal $A = \{1,3,5\}$, daerah hasil $B = \{0,2,4,6\}$ dan range $R = \{0,2,4\}$.

Selain dengan diagram panah penyajian fungsi juga dapat dilakukan dengan menggunakan grafik. Penyajian tersebut dapat dilakukan dengan menggambar grafik persamaan $y = f(x)$, dimana x anggota domain yang dikawankan dengan y anggota kodomain.

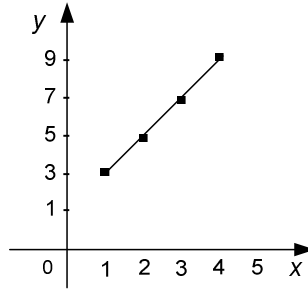
Contoh:

Diketahui fungsi f dengan aturan $f(x) = 2x + 1$ dan memiliki daerah asal $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$.

1. Tentukan nilai fungsi f untuk $x = 1, x = 2, x = 3$ dan $x = 4$!
2. Gambarkan grafik fungsi tersebut pada bidang Cartesius!
3. Berdasarkan hasil pada (2), tentukan daerah hasil fungsi f !

Penyelesaian:

1. $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$
 $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2(2) + 1 = 5$
 $x = 3 \Rightarrow f(3) = 2(3) + 1 = 7$
 $x = 4 \Rightarrow f(4) = 2(4) + 1 = 9$
2. Berdasarkan hasil pada (a), maka garis tersebut melalui titik-titik $(1,3); (2,5); (3,7)$ dan $(4,9)$. Sehingga diperoleh grafik:



3. Daerah hasil fungsi f yaitu: $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 9\}$.

Latihan:

1. Diketahui fungsi f dengan aturan $f(x) = x - 3$ dengan daerah asal $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$.
 - a. Tentukan nilai fungsi f untuk $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ dan $x = 4$!
 - b. Gambarkan grafik fungsi tersebut pada bidang Cartesius!
 - c. Berdasarkan hasil pada (b), tentukan daerah hasil fungsi f !
2. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow (x^2 - 3x + 2)$ dengan daerah asal $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Tentukan daerah hasilnya!

MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA

istiyanto.com

[Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain](#)

Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?

Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.

Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:

sebelasseptember@yahoo.com

B. Fungsi Kuadrat dan Grafiknya

1. Bentuk umum fungsi kuadrat:

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka fungsi kuadrat dirumuskan:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

disebut **fungsi kuadrat dengan peubah/variabel x** .

Contoh:

Fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ adalah fungsi kuadrat dengan $a = 2, b = -3, c = 5$.

Grafik fungsi kuadrat dapat ditulis dengan notasi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ dan grafik fungsi kuadrat disebut **parabola**.

2. Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat

Langkah-langkah untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat adalah sebagai berikut:

a. Menentukan Titik Potong dengan Sumbu x (jika ada)

Titik potong dengan sumbu x, yaitu jika $y = 0$ atau $ax^2 + bx + c = 0$.

- Jika $D > 0$ maka $x_1 \neq x_2$. Sehingga, grafik memotong sumbu x di dua titik, yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.
- Jika $D = 0$ maka $x_1 = x_2$. Sehingga, grafik memotong sumbu x di satu titik, yaitu $(x_1, 0)$.
- Jika $D < 0$, maka tidak ada nilai x yang memenuhi, sehingga grafik tidak memotong sumbu x.

b. Menentukan Titik Potong dengan Sumbu y

Titik potong dengan sumbu y, jika $x = 0$.

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(0)^2 + b(0) + c \\ &= c\end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah $(0, c)$.

c. Menentukan Persamaan Sumbu Simetri

Persamaan sumbu simetri, yaitu:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

d. Menentukan Titik Puncak (Titik Balik Maksimum/Minimum)

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned}
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{D}{-4a}
\end{aligned}$$

Jadi, puncak parabola $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$.

Catatan:

- Jika $a > 0$, grafik terbuka ke atas, titik puncaknya di bawah, maka nilai y minimum. Titik puncaknya berupa titik balik minimum.
- Jika $a < 0$, grafik terbuka ke bawah, titik puncaknya di atas, maka nilai y maksimum. Titik puncaknya berupa titik balik maksimum.

Contoh:

Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat yang mempunyai persamaan $y = x^2 - 4x + 5$.

Penyelesaian:

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Titik potong dengan sumbu $x \Rightarrow y = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x - 5 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow x = 5 \text{ atau } x = -1
\end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah $(5,0)$ dan $(-1,0)$.

2. Titik potong dengan sumbu $y \Rightarrow x = 0$, sehingga diperoleh $y = -5$.

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah $(0,-5)$.

3. Persamaan sumbu simetri:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2.$$

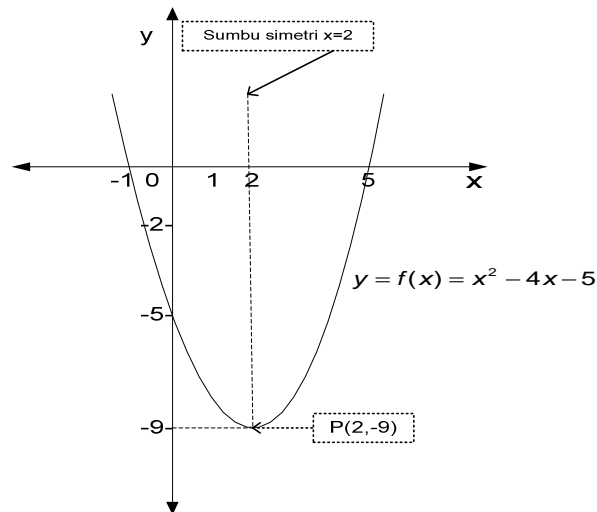
4. Titik puncak parabola $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$. Sehingga:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2 \text{ dan } \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{(-4)^2 - 4(1)(-5)}{-4(1)} = \frac{16 + 20}{-4} = -9.$$

Jadi, titik puncaknya adalah (2,-9).

Karena $a > 0$, maka titik puncaknya berupa titik balik minimum.

Sketsa grafiknya:

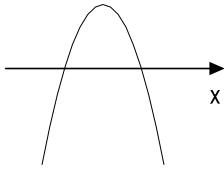
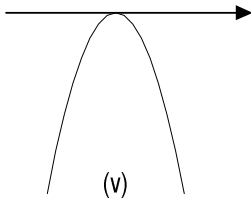
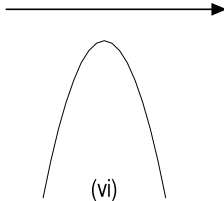


Latihan:

1. Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat $y = -x^2 - 2x + 3$!
2. Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 4x + 5$!

Catatan:

Nilai	$D > 0$ (2 titik potong)	$D = 0$ (1 titik potong)	$D > 0$ (tidak memotong)
$a > 0$ (terbuka ke atas)	 (i)	 (ii)	 (iii)

$a < 0$ (terbuka ke bawah)	 (iv)	 (v)	 (vi)
-------------------------------	---	---	---

Perhatikan bentuk parabola di atas, khususnya (iii) dan (vi).

Bentuk $\left. \begin{matrix} a > 0 \\ D > 0 \end{matrix} \right\}$ disebut **definit positif** (selalu positif untuk setiap harga x).

Bentuk $\left. \begin{matrix} a < 0 \\ D > 0 \end{matrix} \right\}$ disebut **definit negatif** (selalu negatif untuk setiap harga x).

MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA

istiyanto.com

Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain

Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?

Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.

Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:

sebelasseptember@yahoo.com

Contoh:

Tentukan m agar fungsi kuadrat $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + m+6$ definit positif!

Penyelesaian:

Syarat definit positif:

a. $a > 0$, maka $m-2 > 0$, sehingga $m > 2$.

b. $D < 0$, maka $b^2 - 4ac < 0$, sehingga $(-2m)^2 - 4(m-2)(m+6) < 0$.

Diperoleh $m > 3$.

Dari syarat (a) dan (b) diperoleh $m > 3$.

Jadi, untuk $m > 3$ fungsi kuadrat definit positif.

Latihan:

1. Tentukan k , agar $kx^2 + 2x + k$ definit negatif!
2. Tentukan m , agar $(m-1)x^2 - 8x + 8a$ definit positif!

MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA

istiyanto.com

[Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain](#)

Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?

Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.

Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:

sebelasseptember@yahoo.com