

## MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA

istiyanto.com

Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain

Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?

Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.

Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:

[sebelasseptember@yahoo.com](mailto:sebelasseptember@yahoo.com)

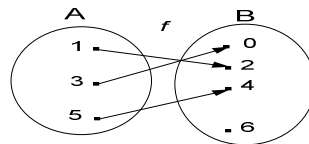
### Materi: Fungsi Kuadrat

- Kajian ulang tentang fungsi
- Fungsi kuadrat dan grafiknya
- Menentukan fungsi kuadrat
- Menentukan sumbu simetri, titik puncak, sifat definit positif atau negatif fungsi kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna
- Menentukan fungsi kuadrat yang melalui tiga titik yang tidak segaris
- Model matematika yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat

#### A. Kajian ulang tentang fungsi

Pada gambar di bawah ini diberikan diagram panah suatu relasi dari himpunan

$A = \{1,3,5\}$  ke himpunan  $B = \{0,2,4,6\}$ .



Tampak bahwa setiap anggota  $A$  dikawankan dengan tepat satu anggota  $B$ . Relasi yang demikian disebut sebagai **fungsi** atau **pemetaan**.

#### Definisi:

**Fungsi** atau **pemetaan**  $f$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah aturan yang mengawankan setiap anggota  $A$  dengan tepat satu anggota  $B$ .

Fungsi  $f$  tersebut dituliskan dengan  $f: A \rightarrow B$  yang dibaca: *fungsi  $f$  memetakan dari A ke B*. Jika  $x \in A$  dan dipasangkan dengan  $y \in B$ , maka  $y$  disebut **peta** dari  $x$  dan ditulis  $y = f(x)$ . Selanjutnya himpunan  $A$  disebut **daerah asal (domain)**, himpunan  $B$  disebut **daerah kawan (kodomain)** dan semua anggota  $B$  yang merupakan peta dari anggota  $A$  disebut **daerah hasil** atau **range fungsi**.

Pada fungsi yang disajikan pada diagram panah di atas terlihat bahwa daerah asal  $A = \{1,3,5\}$ , daerah hasil  $B = \{0,2,4,6\}$  dan range  $R = \{0,2,4\}$ .

Selain dengan diagram panah penyajian fungsi juga dapat dilakukan dengan menggunakan grafik. Penyajian tersebut dapat dilakukan dengan menggambar grafik persamaan  $y = f(x)$ , dimana  $x$  anggota domain yang dikawankan dengan  $y$  anggota kodomain.

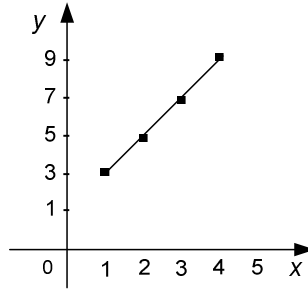
**Contoh:**

Diketahui fungsi  $f$  dengan aturan  $f(x) = 2x + 1$  dan memiliki daerah asal  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ .

1. Tentukan nilai fungsi  $f$  untuk  $x = 1, x = 2, x = 3$  dan  $x = 4$ !
2. Gambarkan grafik fungsi tersebut pada bidang Cartesius!
3. Berdasarkan hasil pada (2), tentukan daerah hasil fungsi  $f$ !

**Penyelesaian:**

1.  $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$   
 $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2(2) + 1 = 5$   
 $x = 3 \Rightarrow f(3) = 2(3) + 1 = 7$   
 $x = 4 \Rightarrow f(4) = 2(4) + 1 = 9$
2. Berdasarkan hasil pada (a), maka garis tersebut melalui titik-titik  $(1,3);(2,5);(3,7)$  dan  $(4,9)$ . Sehingga diperoleh grafik:



3. Daerah hasil fungsi  $f$  yaitu:  $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 9\}$ .

**Latihan:**

1. Diketahui fungsi  $f$  dengan aturan  $f(x) = x - 3$  dengan daerah asal  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ .
  - a. Tentukan nilai fungsi  $f$  untuk  $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$  dan  $x = 4$ !
  - b. Gambarkan grafik fungsi tersebut pada bidang Cartesius!
  - c. Berdasarkan hasil pada (b), tentukan daerah hasil fungsi  $f$ !
2. Diketahui fungsi  $f : x \rightarrow (x^2 - 3x + 2)$  dengan daerah asal  $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Tentukan daerah hasilnya!

**MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA**

[istiyanto.com](http://istiyanto.com)

[Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain](#)

**Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?**

**Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.**

**Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:**

[sebelasseptember@yahoo.com](mailto:sebelasseptember@yahoo.com)

**B. Fungsi Kuadrat dan Grafiknya**

**1. Bentuk umum fungsi kuadrat:**

Misalkan  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dan  $a \neq 0$ , maka fungsi kuadrat dirumuskan:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

disebut **fungsi kuadrat dengan peubah/variabel  $x$** .

**Contoh:**

Fungsi kuadrat  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  adalah fungsi kuadrat dengan  $a = 2, b = -3, c = 5$ .

Grafik fungsi kuadrat dapat ditulis dengan notasi  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  dan grafik fungsi kuadrat disebut **parabola**.

## 2. Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat

Langkah-langkah untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat adalah sebagai berikut:

### a. Menentukan Titik Potong dengan Sumbu x (jika ada)

Titik potong dengan sumbu x, yaitu jika  $y = 0$  atau  $ax^2 + bx + c = 0$ .

- Jika  $D > 0$  maka  $x_1 \neq x_2$ . Sehingga, grafik memotong sumbu x di dua titik, yaitu  $(x_1, 0)$  dan  $(x_2, 0)$ .
- Jika  $D = 0$  maka  $x_1 = x_2$ . Sehingga, grafik memotong sumbu x di satu titik, yaitu  $(x_1, 0)$ .
- Jika  $D < 0$ , maka tidak ada nilai x yang memenuhi, sehingga grafik tidak memotong sumbu x.

### b. Menentukan Titik Potong dengan Sumbu y

Titik potong dengan sumbu y, jika  $x = 0$ .

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(0)^2 + b(0) + c \\ &= c\end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah  $(0, c)$ .

### c. Menentukan Persamaan Sumbu Simetri

Persamaan sumbu simetri, yaitu:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

### d. Menentukan Titik Puncak (Titik Balik Maksimum/Minimum)

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned}
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{D}{-4a}
\end{aligned}$$

Jadi, puncak parabola  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$ .

**Catatan:**

- Jika  $a > 0$ , grafik terbuka ke atas, titik puncaknya di bawah, maka nilai  $y$  minimum. Titik puncaknya berupa titik balik minimum.
- Jika  $a < 0$ , grafik terbuka ke bawah, titik puncaknya di atas, maka nilai  $y$  maksimum. Titik puncaknya berupa titik balik maksimum.

**Contoh:**

Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat yang mempunyai persamaan  $y = x^2 - 4x + 5$ .

**Penyelesaian:**

**Langkah-langkah penyelesaian:**

1. Titik potong dengan sumbu  $x \Rightarrow y = 0$ , sehingga:

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x - 5 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow x = 5 \text{ atau } x = -1
\end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu  $x$  adalah  $(5,0)$  dan  $(-1,0)$ .

2. Titik potong dengan sumbu  $y \Rightarrow x = 0$ , sehingga diperoleh  $y = -5$ .

Jadi, titik potong dengan sumbu  $y$  adalah  $(0,-5)$ .

3. Persamaan sumbu simetri:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2.$$

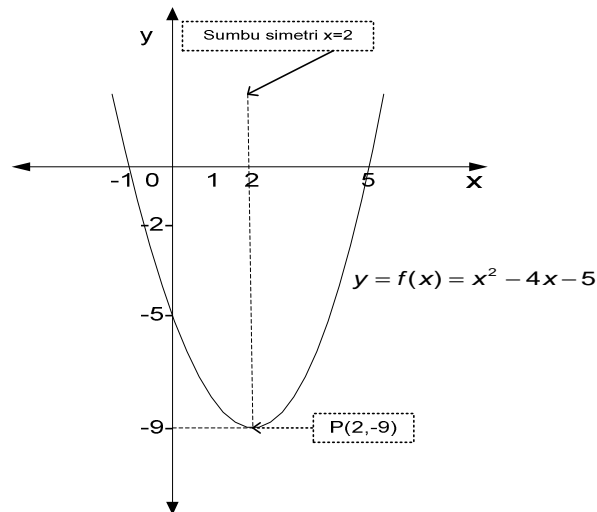
4. Titik puncak parabola  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$ . Sehingga:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2 \text{ dan } \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{(-4)^2 - 4(1)(-5)}{-4(1)} = \frac{16 + 20}{-4} = -9.$$

Jadi, titik puncaknya adalah (2,-9).

Karena  $a > 0$ , maka titik puncaknya berupa titik balik minimum.

**Sketsa grafiknya:**

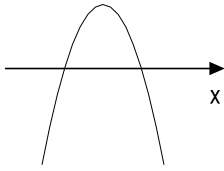
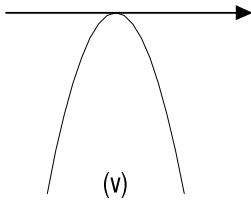
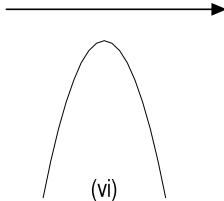


**Latihan:**

1. Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat  $y = -x^2 - 2x + 3$ !
2. Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat  $y = 2x^2 - 4x + 5$ !

**Catatan:**

Nilai	$D > 0$ (2 titik potong)	$D = 0$ (1 titik potong)	$D > 0$ (tidak memotong)
$a > 0$ (terbuka ke atas)	 (i)	 (ii)	 (iii)

$a < 0$ (terbuka ke bawah)	 (iv)	 (v)	 (vi)
-------------------------------	---	---	---

Perhatikan bentuk parabola di atas, khususnya (iii) dan (vi).

Bentuk  $\left. \begin{matrix} a > 0 \\ D > 0 \end{matrix} \right\}$  disebut **definit positif** (selalu positif untuk setiap harga  $x$ ).

Bentuk  $\left. \begin{matrix} a < 0 \\ D > 0 \end{matrix} \right\}$  disebut **definit negatif** (selalu negatif untuk setiap harga  $x$ ).

## MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA

[istiyanto.com](http://istiyanto.com)

Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain

Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?

Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.

Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:

[sebelasseptember@yahoo.com](mailto:sebelasseptember@yahoo.com)

### Contoh:

Tentukan  $m$  agar fungsi kuadrat  $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + m+6$  definit positif!

### Penyelesaian:

Syarat definit positif:

a.  $a > 0$ , maka  $m-2 > 0$ , sehingga  $m > 2$ .

b.  $D < 0$ , maka  $b^2 - 4ac < 0$ , sehingga  $(-2m)^2 - 4(m-2)(m+6) < 0$ .

Diperoleh  $m > 3$ .

Dari syarat (a) dan (b) diperoleh  $m > 3$ .

Jadi, untuk  $m > 3$  fungsi kuadrat definit positif.

### Latihan:

1. Tentukan  $k$ , agar  $kx^2 + 2x + k$  definit negatif!
2. Tentukan  $m$ , agar  $(m-1)x^2 - 8x + 8a$  definit positif!

## **MODUL MATEMATIKA UNTUK SMA**

[istiyanto.com](http://istiyanto.com)

[Mari Berbagi Ilmu Dengan Yang Lain](#)

**Pesan soal-soal matematika untuk SD, SMP dan SMA ?**

**Soal ulangan harian, ulangan mid, ulangan semester, soal-soal UAN dll.**

**Tulis permintaan Anda dan kirim email ke:**

[sebelasseptember@yahoo.com](mailto:sebelasseptember@yahoo.com)